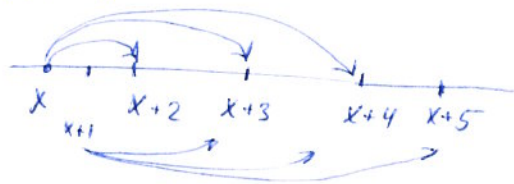


① 12.09.2018

Оптимизация в энергетике
Давыдов Михаил Рубинович

1. Моделирование спроса товара
2. Модели сети переменного тока
3. Задачи планирования и управления ЭЭС
 - расчет установившихся режимов
 - оптимизация установившихся режимов
 - выбор состава выходящего оборудования



Это энергетический блок в 300 МВт
Его мощность можно включать и выключать (~30 р/гер)
Его мощность отключается быстро

Факты:

4. Необходимые условия оптимальности 1 порядка
(Теорема Каруна-Куна-Таккера)

$$f(x) \rightarrow \min$$

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}$$

$$f, g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Если } x^* = \arg \min, \rightarrow \exists \lambda_i, i = \overline{1, m}, \lambda_i \geq 0:$$

$$1. \quad \underset{(\nabla)}{\text{grad}} f(x^*) + \sum \lambda_i \underset{(\nabla)}{g}_i(x^*) = 0$$

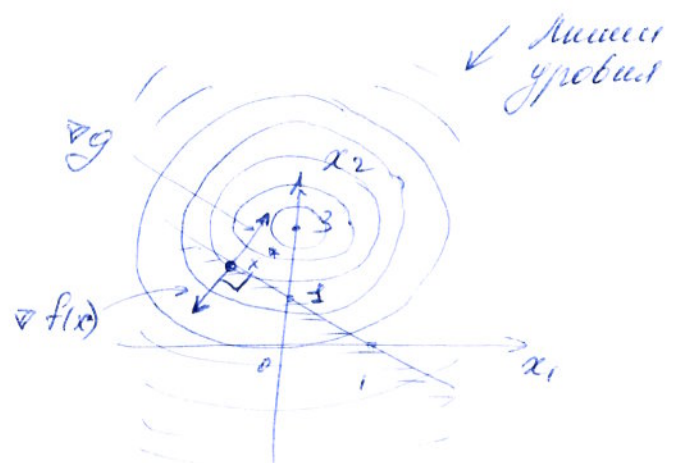
$$2. \quad x^*: \quad g_i(x^*) \leq 0, \quad i = \overline{1, m}$$

$$\nexists \quad \lambda_i \quad g_i(x^*) = 0 \quad \forall i = \overline{1, m}$$

Пример:

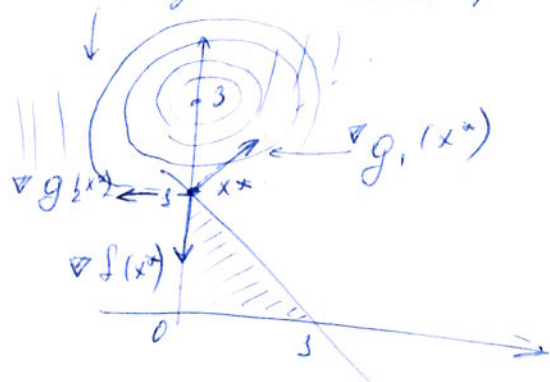
$$f(x) = x_1^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 \leq 1$$



конус активных ограничений

12.09.2018



$$g_1: x_1 + x_2 \leq 1$$

$$g_2: x_1 \geq 0 \quad -x_1 \leq 0$$

$$g_3: x_2 \geq 0 \quad -x_2 \leq 0$$

Активные ограничения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 = 0 \\ -x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 0$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 - 6 \end{pmatrix} \Big|_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad \lambda_1 = 4$$

\$\Rightarrow -\nabla f(x^*)\$ лежит в конусе активных ограничений.

Монотонизация ограничений:

\$g(x) \leq y\$, \$y\$ будем варьировать, \$\Rightarrow\$

\$f(x^*(y))\$: будем считать, что эта функция непрерывна по параметру.

$$\nabla_y f(x^*(y)) = -\lambda(y)$$

Далее рассмотрим задачу

задача: \$f(x) \rightarrow \min\$

$$g(x) = y$$

Решение:

$$\nabla f(x(y)) + \lambda(y) \nabla g(x(y)) = 0$$

$$g(x(y)) = y$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} f(x(y)) &= \nabla_x f(x(y)) \frac{dx(y)}{dy} + \frac{d\lambda(y)}{dy} (g(x(y)) - y) + \\ &+ \lambda(y) \left(\nabla_x g(x(y)) \frac{dx(y)}{dy} - 1 \right) = \end{aligned}$$

③ 12.09.2018

$$= \underbrace{\left[\nabla_x f(x(y)) + \lambda(y) \nabla_x g(x(y)) \right]}_{=0} \frac{dx(y)}{dy} - \lambda(y) = -\lambda(y)$$

$$\Rightarrow \nabla_x f(x(y)) \frac{d(x(y))}{dy} = -\lambda(y), \text{ r.e.}$$

$$\nabla_y f(x^*(y)) = -\lambda(y) \quad \square$$

④ 12.09.2018

Есть склад товаров $S_l, l = \overline{1, m}$

Есть потребности $d_j, j = \overline{1, n}$

Есть стоимость доставки c_{lj}

x_{lj} - объем товара, доставленного со склада l потребителю j

$n = 1, m = 2$

$x_{11}, x_{21} \Rightarrow 0 \leq x_{11} \leq S_1, 0 \leq x_{21} \leq S_2$

$d_1 \Rightarrow x_{11} + x_{21} = d_1$

$$\begin{array}{ccc} c_{11} x_{11} + c_{21} x_{21} \rightarrow \min & & \\ \parallel & & \parallel \\ 1 & & 3 \\ S_1 = 1 & & S_2 = 5, d_1 = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \rightarrow \min \\ \left. \begin{array}{l} 0 \leq x_1 \leq 1 \\ 0 \leq x_2 \leq 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{активно} \\ \text{неактивно} \end{array} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 \\ \lambda_2 = 0 \end{array} \\ x_1 + x_2 = 4 - \text{активно} \quad \lambda_3 \\ x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

При ограничении типа равенства $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_3 = -3$$

В данном случае: $x_1 \in 1 + \Delta_1$

$$x^*(\Delta_1) = \begin{pmatrix} 1 + \Delta_1 \\ 3 - \Delta_1 \end{pmatrix} \quad 1(1 + \Delta_1) + 3(3 - \Delta_1) = 10 - 2\Delta_1 = \tilde{f} \quad 10 = f$$

$$\frac{\partial f}{\partial \Delta_1} = -2 = -\lambda_3$$

shadow prices - теневые цены, насколько сократится эффективность

Каково же готово заменить Δ_2 расширен ресурс из Δ_1 .

$$\Rightarrow \lambda, \Delta_1 = 2 \Delta_1$$

⑤ 12 09 2018

В ядре максимизируете:

$$\frac{\partial}{\partial y} \mathcal{L}(x(y)) = \lambda(y) \quad , \Rightarrow \lambda \text{ показывает, какие ресурсы являются сдерживающими}$$

сaddle point

19.09.2018 (1)

$$f(x, y), x \in X \subset \mathbb{R}^n, y \in Y \subset \mathbb{R}^n$$

$$(x_0, y_0) \in X \times Y, \text{ если } f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \leq f(x, y_0) \forall x \in X \forall y \in Y$$

Пример: $(0, 0)$, где $f(x, y) = x^2 - y^2$

$$1) (x_0, y_0) - \text{сaddle point} \rightarrow \max_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y) = \min_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Д-во:

$$\begin{aligned} \min_{x \in X} f(x, y) &= f(x(y), y) \Rightarrow \max_{y \in Y} f(x(y), y) \geq f(x(y_0), y_0) \geq \\ &\geq f(x_0, y_0) \geq f(x_0, y) \geq f(x(y), y) \Rightarrow \text{сaddle point} \\ &\quad \forall y \quad \forall y \quad \max_{y \in Y} f(x(y), y) \end{aligned}$$

аналогично для min max.

$$f(x) \rightarrow \min$$

$$g_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}, \lambda \in \mathbb{R}^m, (x^0, \lambda^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$$

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$$

1) Если (x_0, y_0) - седловая точка ф-ции Лагранжа, $\Rightarrow x_0$ - точка глобального минимума.

2) f, g - выпуклы, (x_0, λ_0) - точка min в т.т.т., $\Rightarrow (x_0, \lambda_0)$ - седловая точка.

Д-во:

2) Условия Куна-Таккера.

$$1) \nabla_x L(x^0, \lambda^0) = 0$$

$$2) \lambda_i^0 g_i(x^0) = 0 \quad \forall i = \overline{1, m}$$

$$3) g_i(x^0) \leq 0$$

$$\lambda_i^0 \geq 0$$

$$\begin{aligned} L(x, \lambda) - \text{выпуклая ф-ция} \Rightarrow \\ \text{из 1)} \Rightarrow L(x^0, \lambda^0) \leq L(x, \lambda^0) \\ \Rightarrow \text{Д-во } L(x^0, \lambda) \leq L(x^0, \lambda^0): \\ f(x^0) + \sum \lambda_i g_i(x^0) \leq f(x^0) + \\ + \sum \underbrace{\lambda_i^0 g_i(x^0)}_{=0}, \Rightarrow \text{доказано} \end{aligned}$$

$$1) \quad f(x^0) + \sum \lambda_i^0 g_i(x^0) \geq f(x^0) + \sum \lambda_i g_i(x^0) \quad \underline{\forall \lambda_i \in \mathbb{R}_+^m}$$

$$\sum (\lambda_i^0 - \lambda_i) g_i(x^0) \geq 0$$

$$1. \text{ д. ест } g_i(x^0) \leq 0$$

$$\text{о/н. } \exists k: g_k(x^0) > 0, \Rightarrow \lambda_k = \lambda_k^0$$

$$\text{Возьмем } \lambda_i = \lambda_i^0 \quad \forall i \neq k, \Rightarrow$$

$$(\lambda_k^0 - \lambda_k) g_k(x^0) \geq 0$$

$$\uparrow \text{возьмем } \lambda_k > \lambda_k^0 \Rightarrow \nexists$$

$$\Rightarrow \boxed{g_k(x^0) \leq 0}$$

$$2. \text{ д. ест } \lambda_i^0 g_i(x^0) = 0, \text{ значит все } \lambda_k = \lambda_k^0, \text{ где } k \neq i$$

$$(\lambda_i^0 - \lambda_i) g_i(x^0) \geq 0, \text{ о/н } \lambda_i^0 g_i(x^0) \neq 0, \text{ т.е. } < 0$$

$$\Rightarrow \text{возьмем } \lambda_i \in [0, \lambda_i^0] \Rightarrow \lambda_i^0 g_i(x^0) = 0$$

$$3. \quad f(x^0) + \sum \lambda_i^0 g_i(x^0) \leq f(x) + \underbrace{\sum \lambda_i^0 g_i(x)}_{\leq 0} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{Возьмем } \forall x: g_i(x) \leq 0, \Rightarrow F(x) + \lambda_i g_i(x) \leq F(x)$$

$$F(x^0) \leq F(x) \quad \forall x \text{ т.д. } g_i(x) \leq 0$$

$$d(\lambda) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \lambda) \quad (\text{большинство случаев выпуклости})$$

$d(\lambda)$ всегда берётся

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}_+} d(\lambda) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}_+} \min_x L(x, \lambda)$$

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}_+} d(\lambda) \leq \min_{x \in X} f(x)$$

Д-бо:

$$d(\lambda) = \min_{x \in X} L(x, \lambda) = \min_{x \in X} f(x) + \underbrace{\sum \lambda_i g_i(x)}_{\leq 0} \leq \min_{x \in X} f(x)$$

Воспользуемся: $\alpha \in (0, 1)$

$$\forall d(\alpha \lambda^1 + (1-\alpha) \lambda^2) \geq \alpha d(\lambda^1) + (1-\alpha) d(\lambda^2)$$

$$\min_x L(x, *) = \min_x (\alpha L(x, \lambda^1) + (1-\alpha) L(x, \lambda^2)) =$$

$$(\alpha f = (1-\alpha)f + \text{линейная комбинация})$$

$$= \alpha L(\tilde{x}, \lambda^1) + (1-\alpha) L(\tilde{x}, \lambda^2) \geq \alpha \min_x L(x, \lambda^1) + (1-\alpha) \min_x L(x, \lambda^2) = \alpha d(\lambda^1) + (1-\alpha) d(\lambda^2)$$

$$\langle c, x \rangle \rightarrow \min$$

$$Ax \leq b, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$L(x, \lambda) = \langle c, x \rangle + \lambda^T (Ax - b)$$

$$d(\lambda) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \langle c, x \rangle + \lambda^T (Ax - b) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} (c^T + \lambda^T A)x - \lambda^T b =$$

$$= \begin{cases} -\infty, & \text{если } c^T + \lambda^T A \neq 0 \\ -\lambda^T b, & \text{если } c^T + \lambda^T A = 0 \end{cases}$$

$$\max_{\lambda \geq 0} d(\lambda) = \max_{\lambda \geq 0} -\lambda^T b - \frac{1}{2} \lambda^T A \lambda$$

$$e^T + \lambda^T A = 0$$

19.09.2018 (4)

- двойственная задача.

Есть n фирм, производящих один товар,

x_i - технологическая пр-ва, $x_i \in X_i$

c_i - себестоимость

d - спрос на товар

$$\sum x_i = d, \quad \lambda - \text{цена перешек}$$

$$\max_{x_i \in X_i} \lambda x_i - c_i x_i \Rightarrow x_i^0 - \text{индивидуальная стратегия}$$

? Есть λ : такого уровня стратегия оптимальная,

и $\sum x_i = d$. Т.е. есть равновесие на рынке.

$\Rightarrow \lambda$ - цена, обеспечивающая предложение

$$\min_{x_i \in X_i} \sum c_i x_i$$

$$\xrightarrow{\text{св. точка}} \lambda^0$$

$$\sum x_i = d$$

Для простоты X_i выпуклы.

$$\max_{\lambda} \min_{x_i \in X_i} \sum c_i x_i + \lambda (\sum x_i - d) = \min_{x_i \in X_i} \sum c_i x_i + \lambda^0 (\sum x_i - d)$$

$$= \min_{x_i \in X_i} \sum (\lambda^0 x_i + c_i x_i) - \lambda^0 d = - \max_{x_i \in X_i} \sum (\lambda^0 x_i - c_i x_i) + \lambda^0 d$$

$\uparrow$ индивидуальные цены
сбавляют гос. план.
со стратегиями
фирм.

Есть ли седловой точки, то что?

26.09.2018. ①

Предельные издержки

$$c = f'(x)$$

Есть ли увеличение производства по Δx , $\Rightarrow$

$$f(x^0 + \Delta x) = f(x^0) + \underbrace{f'(x^0)}_{\substack{\uparrow \text{ предельные издержки} \\ \text{(цена дополнительной единицы} \\ \text{продукции)}}} \Delta x$$

§ $f(x) = 1 - x^2$ - предельные издержки

Рассчитываем издержки - издержки, которые платит производство, да еще есть спрос и производит

$x \in [0, 1]$ - сколько вообще мы можем выпустить

$x \leq 1/2$ - спрос на продукцию

$$\min_{x \in [0, 1]} f(x) = f(x^*) = f(1/2)$$

$$x \leq 1/2$$

Функция Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = 1 - x^2 + \lambda(x - 1/2)$$

$$\nabla_x L(x, \lambda) = -2x + \lambda = 0, \Rightarrow \lambda^* = 1$$

$\Rightarrow$ Пара Кун-Таккера $(x^*, \lambda^*) = (1/2, 1)$

?: является ли эта точка седловой?

$$\min_{x \in [0, 1]} (x, \lambda^*) = \min_{x \in [0, 1]} (-2x + 1) + 1 - x^2 + x - 1/2 = \min_{x \in [0, 1]} -x^2 + x + 1/2 =$$

$$= 1/2, \text{ но } x^* = 1/2 \text{ не явл. точкой минимума.}$$



Но промислом заметим мы говорим, что (λ^*) - цена издержек - правильная.

$$\max_{x \in [0, 1]} -\lambda^* x - (1 - x^2) \quad \textcircled{=}$$

$$1 - (x + \Delta)^2 \Big|_{x=1/2} \sim 1 - (2x + \Delta) \Big|_{x=1/2} = 1 - 1/4 - \Delta$$

Продавец готов заплатить, чтобы уменьшить издержки.

$$\textcircled{=}\max_{x \in [0,1]} -x - 1 + x^2 = -3$$

в точке минимума функции $x^0 \in [0,1]$ - оптимальный выпуск

П.х. проучившаяся функция выпуклая, то седловой точки нет. Точка Куна-Таккера не приводит к равновесию на рынке.

Модель централизованного аукциона одного товара без структурных ограничений

1. Участники

- продавцы / поставщики n
- покупатели / потребители m

2. Заявки

Пара (цена, количество):

$$(p_i, x_i) \quad i = \overline{1, n}$$

$$(c_j, y_j) \quad j = \overline{1, m}$$

↑ руб/ед. ↓ руб/кВтч

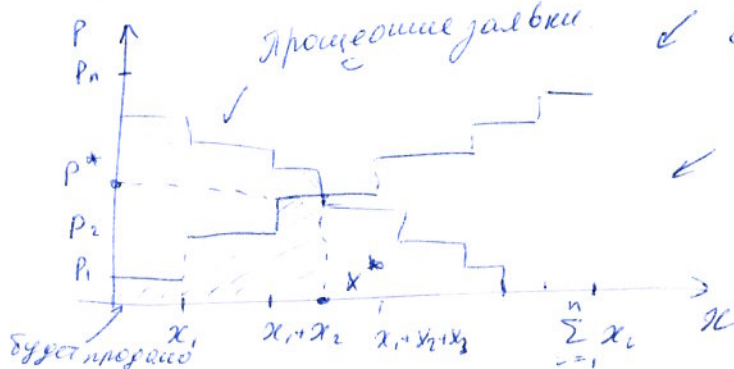
{ мегаватт-час - количество энергии
 { мегаватт - мощность.

Аукцион:

Заявки поставщиков выстраиваются по цене.

↙ от-чис предложения

↙ от-чис спросе.



Определим цену:

26.09.2018

1) p^* — по "маржинальной" цене)

$y_i : p^*$, $x_i : p^*$ — оба равны (получим выгоду ^{большее отпущено})

Есть данные: p^* выводит из моды, Δ — поиграем
равенство объемов

2)

$$x_i : p_i$$

$$\frac{1}{V^*} (p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + \underbrace{p^* x_e}_{= p_e} (1 - \Delta)) = p^0$$

p^0 — средневзвешенная цена.

$$V^* = \sum x_i$$

1) В первом случае поставщик подаст "искусственную цену".

$\max_{(x,y)} \sum_{j=1}^m c_j y_j - \sum_{i=1}^n p_i x_i$ — функция благосостояния
welfare function

$$\sum x_i = \sum y_j$$

(совокупная прибыль участников рынка)

$$0 \leq x_i \leq x_i^{\max}$$

$$0 \leq y_j \leq y_j^{\max}$$

Д спрос

n - поставщиков

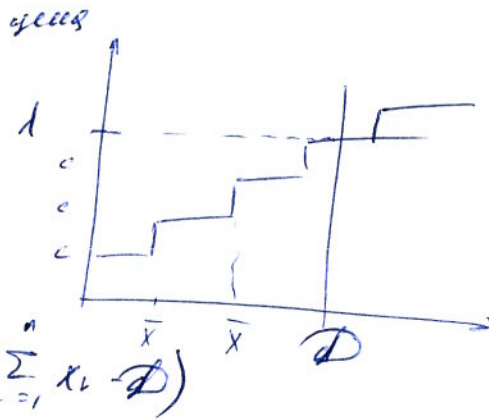
каждый обладает $x_i \in [0, \bar{x}_i]$ - технологическое макс

c_i - себестоимость в рублях за 1 продукцию у поставщика

$$\min \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

$$x_i \in [0, \bar{x}_i]$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = D$$



$$\max_{\lambda} \min_{x_i \in [0, \bar{x}_i]} \sum_{i=1}^n c_i x_i + \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i - D \right)$$

$$\max_{\lambda} \left[\left(\sum \min_{x_i \in [0, \bar{x}_i]} (c_i + \lambda) x_i \right) - \lambda D \right]$$

$$\arg \min_{x_i \in [0, \bar{x}_i]} (c_i + \lambda) x_i = \begin{cases} \bar{x}_i, & \text{если } (c_i + \lambda) < 0 \\ 0, & \text{если } (c_i + \lambda) > 0 \\ x_i \in [0, \bar{x}_i], & \text{если } (c_i + \lambda) = 0 \end{cases}$$

↑
возникает
определ по λ

Будем считать, что $c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq \dots \leq c_n$

$$\lambda \in (-c_k, -c_{k+1}]$$

$$\lambda = -c_k$$

$$\lambda \in (-c_k, -c_{k+1})$$

$$\lambda = -c_{k+1}$$

$$\lambda = -c_k: \max_{\lambda} \sum_{i=1}^k (c_i + \lambda) \bar{x}_i - \lambda D = d(\lambda)$$

$$d'(\lambda) = \sum x_i - D$$

$$\lambda = -c_k$$

$$d(\lambda) \Big|_{\lambda = -c_k} = \sum_{i=1}^{k-1} (c_i + \lambda) \bar{x}_i + \underbrace{(c_k + \lambda)}_{=0} x_k - \lambda D$$

$$d'(\lambda) \Big|_{\lambda = -c_k} = \sum_{i=1}^{k-1} \bar{x}_i + x_k - D = 0, \text{ может быть, если}$$

$$D \in \left[\sum_{i=1}^{k-1} x_i, \sum_{i=1}^k x_i \right], \text{ если не так, то max достигается}$$

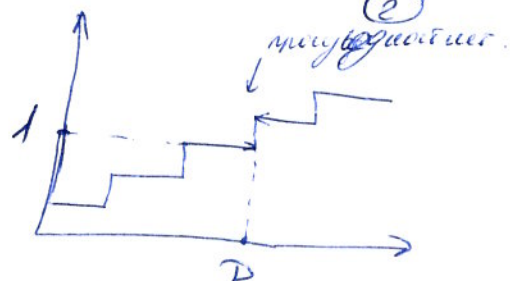
или миним.

$$\lambda \in (-c_{k+1}, -c_k)$$

$$d(\lambda) = \sum_{i=1}^k (c_i + \lambda) \bar{x}_i - \lambda D$$

$$d'(\lambda) = \sum_{i=1}^k x_i - D = 0$$

λ : спрос равен предложению - производная целевой функции равна 0



$$\min_{x_i \in [0, \bar{x}_i]} \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

$$\lambda: \sum x_i = D$$

$$\pi_i^+: x_i \leq \bar{x}_i$$

$$\pi_i^-: -x_i \leq 0$$

Условия Куна - Таккера.

$$\begin{cases} \frac{\partial L(x, \bar{\lambda})}{\partial x_i} = c_i + \lambda + \pi_i^+ - \pi_i^- = 0 \\ \bar{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \pi^+ \\ \pi^- \end{pmatrix} \\ \pi_i^+ (x_i - \bar{x}_i) = 0 \\ \pi_i^- x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i = D \end{cases}$$

Пусть $\lambda^0 = -c_k$

$$-\lambda^0 = c_i + \pi_i^+ - \pi_i^- \Rightarrow i < k:$$

$$i > k:$$

$$i = k:$$

$$c_k = c_i + \pi_i^+ - \pi_i^- \Rightarrow \pi_i^+ = 0, \pi_i^- = 0$$

$$\pi_i^+ \geq 0, \pi_i^- \geq 0 \Rightarrow \pi_i^+ > 0, \pi_i^- = 0$$

$$c_k \geq c_i + \pi_i^+ - \pi_i^-, \Rightarrow \pi_i^+ > 0, \pi_i^- = 0$$

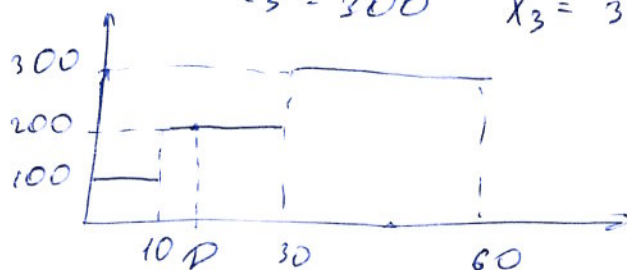
$$c_k = c_i + \pi_i^+ - \pi_i^-, \Rightarrow \pi_i^+ = 0, \pi_i^- = 0$$

так $\pi_i^+ = 0, \pi_i^- = 0$, поэтому $x_i = \bar{x}_i$ и $x_i = 0$

$$\begin{aligned} -\lambda^0 &= c_i + \pi_i^+, i < k \\ -\lambda^0 &= c_i - \pi_i^-, i > k \\ -\lambda^0 &= c_k, i = k \end{aligned}$$

Пример: $c_1 = 100, x_1 = 10$
 $c_2 = 200, x_2 = 20$
 $c_3 = 300, x_3 = 30$

$$D = 15$$



	λ	c	π
1:	200	100	100
2:	200	200	0
3:	200	300	-100

03.10.2018 (3)

$$\max \sum \tilde{c}_i y_i - \sum c_i x_i$$

$$x_i \in [0, \bar{x}_i]$$

$$y_j \in [0, \bar{y}_j]$$

$$\lambda: \sum x_i - \sum y_j = 0$$

Условия Куна - Таккера

$$-c_i = \lambda + \pi_i^+ - \pi_i^-, \quad i = \overline{1, n} \quad - \text{поставщики}$$

$$\tilde{c}_j = -\lambda + \pi_j^+ - \pi_j^-, \quad j = \overline{1, m} \quad - \text{потребители.}$$

$$\text{Если } c_j > -\lambda, \Rightarrow \pi_j^+ > 0, \pi_j^- = 0$$